Pertemuan 1

LOGIKA MATEMATIKA

PROPOSISI

- Definisi 1.1.
- Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak dapat sekaligus keduanya.
- Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut nilai kebenaran (*truth value*).

(Contoh 1) Proposisi

Kalimat2 berikut ini proposisi/bukan :

a) 6 adalah bilangan genap.
b) Soekarno adalah Presiden Indonesia yang pertama.
c) 2+2=4
d) Ibukota Provinsi Jawa Barat adalah Semarang.
e) 12>19
f) Kemarin hari hujan
g) Suhu di permukaan laut 21 derajat Celsius
h) Pemuda itu tinggi
i) Jam berapa kereta api Turangga tiba di Stasiun Jombang?
j) Serahkan uangmu sekarang !

Mengkombinasikan Proposisi

Konjungsi

Misal p dan q adalah proposisi, maka konjungsinya dinotasikan

$$p \wedge q$$

Dibaca p dan q

Disjungsi

Misal p dan q adalah proposisi, maka disjungsinya dinotasikan

$$p \vee q$$

Dibaca p atau q

Negasi/ingkaran

Misal p adalah proposisi, maka negasinya dinotasikan

$$\sim p$$

Dibaca tidak p

(Contoh 2) kombinasi proposisi

Diketahui proposisi-proposisi berikut ini :

p : Hari ini hujan

q : Mahasiswa-mahasiswa diliburkan dari kuliah

Maka :

$p \wedge q$: hari ini hujan dan mahasiswa-mahasiswa diliburkan dari kuliah.

$p \vee q$: hari ini hujan atau mahasiswa-mahasiswa diliburkan dari kuliah

$\sim p$: hari ini tidak hujan

(Contoh 3) kombinasi proposisi

Diketahui proposisi-proposisi berikut ini :

p : Hari ini hujan

q : Hari ini dingin

Maka :

$q \vee \sim p$: hari ini dingin atau tidak hujan.

$\sim p \wedge \sim q$: hari ini tidak hujan dan tidak dingin / hari ini tidak hujan maupun dingin

$\sim (\sim p)$: tidak benar hari ini tidak hujan

(Contoh 4) kombinasi proposisi

- Diketahui proposisi-proposisi berikut :

p : pemuda itu tinggi

q : pemuda itu tampan

Nyatakan proposisi berikut kedalam ekspresi logika (notasi simbolik) :

a) Pemuda itu tinggi dan tampan
b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

jwbn (Contoh 4) kombinasi proposisi

- Diketahui proposisi-proposisi berikut :

p : pemuda itu tinggi

q : pemuda itu tampan

Penyeelesaian :

a) Pemuda itu tinggi dan tampan

$$p \wedge q$$

b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan

$$p \wedge \sim q$$

c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan

$$\sim p \wedge \sim q$$

d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan

$$\sim (\sim p \vee \sim q)$$

e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan

$$p \vee (\sim p \wedge q)$$

f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

$$\sim (\sim p \wedge \sim q)$$

TABEL KEBENARAN
"konjungsi"
"disjungsi"
"disjungsi eksklusif"

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F

(contoh 5) konjungsi dan disjungsi

Jika $p, q,$ dan r adalah proposisi. Bentuklah table kebenaran dari ekspresi logika

$$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r).$$

Penyelesaian :

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

jawaban (contoh 5) konjungsi dan disjungsi

Jika $p, q,$ dan r adalah proposisi. Bentuklah table kebenaran dari ekspresi logika

$$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r).$$

Penyelesaian :

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

(contoh 6) tautologi

- Disebut “tautologi” jika ia benar untuk semua kasus
- Contoh : $p \vee \sim (p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

(contoh 7) kontradiksi

- Disebut “kontradiksi” jika ia salah untuk semua kasus
- Contoh : $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Hukum-hukum logika proposisi

1. Hukum identitas *i.* $p \vee \boldsymbol{F} \Leftrightarrow p$ *ii.* $p \wedge \boldsymbol{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum null *i.* $p \wedge \boldsymbol{F} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$ *ii.* $p \vee \boldsymbol{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$
3. Hukum negasi *i.* $p \vee \sim p \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$ *ii.* $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$	4. Hukum idempoten *i.* $p \vee p \Leftrightarrow p$ *ii.* $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan *i.* $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ *ii.* $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif *i.* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *ii.* $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif *i.* $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ *ii.* $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif *i.* $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *ii.* $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan *i.* $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ *ii.* $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

(contoh 8) penerapan hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim (p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian :

$p \vee \sim (p \vee q)$	$\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$	hk. De Morgan
	$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$	hk. distributif
	$\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q)$	hk. negasi
	$\Leftrightarrow p \vee \sim q$	hk. identitas

(contoh 9) penerapan hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian :

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (p \vee q)$	hk. identitas
$\Leftrightarrow p \vee (F \wedge q)$	hk. distributif
$\Leftrightarrow p \vee F$	hk. null
$\Leftrightarrow p$	hk. identitas

(contoh 10) penerapan hukum logika

Buktikan ekuivalensi berikut :

a) $\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p$

b) $\sim((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q) \equiv p$

c) $(p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q) \equiv p$

Penyelesaian :

a)
$$\begin{aligned}
\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) &= (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{hk. De Morgan} \\
&= \sim p \wedge (q \vee \sim q) && \text{hk. distributif} \\
&= \sim p \wedge T && \text{hk. negasi} \\
&= \sim p && \text{hk. Identitas}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\sim((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q) &= \sim(\sim p \wedge (q \vee \sim q)) \vee (p \wedge q) \\
&= \sim(\sim p \wedge T) \vee (p \wedge q) \\
&= \sim(\sim p) \vee (p \wedge q) \\
&= p \vee (p \wedge q) \\
&= p
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
(p \wedge (\sim(\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q) &= (p \wedge (p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q) \\
&= (p \wedge p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \\
&= (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \\
&= p \wedge (\sim q \vee q) \\
&= p \wedge T \\
&= p
\end{aligned}$$

(contoh 11) penerapan hukum logika

Buktikan ekuivalensi berikut :

$a)\quad (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$

$b)\quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv ((p \land q) \Rightarrow r)$

Penyelesaian :

$$\boxed{p \Rightarrow q \quad \equiv \quad \sim p \lor q}$$

Untuk kasus (a) ini, pembuktian dilakukan dari ruas kanan

$$
\begin{aligned}
a)\quad \sim p \Rightarrow \sim q &= \sim(\sim p) \lor \sim q \\
&= p \lor \sim q \\
&= \sim q \lor p \\
&= q \Rightarrow p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) &= \sim p \lor (q \Rightarrow r) \\
&= \sim p \lor (\sim q \lor r) \\
&= (\sim p \lor \sim q) \lor r \\
&= \sim (p \land q) \lor r \\
&= (p \land q) \Rightarrow r
\end{aligned}
$$

TABEL KEBENARAN "implikasi" "biimplikasi"

p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

KASUS "implikasi"

ANALOGI :
"Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini".

Tinjau 4 kasus berikut :
Kasus 1 : Nilai ujian akhir anda diatas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut (konklusi benar). Pada kasus ini, pernyataan dosen anda benar.

Kasus 2 : Nilai ujian akhir anda diatas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Ppada kasus ini, dosen anda berbohong (pernyataannya salah)

Kasus 3 : Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar). Pada kasus ini, dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemmpuan anda yang lain bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A)

Kasus 4 : Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Pada kasus ini dosne anda benar.

KASUS “implikasi”

Implikasi $p \rightarrow q$ memainkan peranan penting dalam penalaran. Implikasi ini tidak hanya diekspresikan dalam pernyataan “jika p maka q”, tapi juga dalam berbagai cara :

a. Jika p, maka q
b. Jika p, q
c. p mengakibatkan q
d. q jika p
e. p hanya jika q
f. p syarat cukup agar q
g. q syarat perlu bagi p
h. q bilamana p

Contoh (1) :

a. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
b. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
c. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
d. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
e. Ahmad bisa mengambil matakuliah Data Warehouse hanya jika ia sudah lulus matakuliah Basis Data.
f. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api.
g. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
h. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

KASUS "implikasi"

Contoh (2) :

Misalkan

x : Anda berusia 17 tahun

y : Anda dapat memperoleh SIM

Nyatakan proposisi berikut ke dalam notasi implikasi :

a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh SIM
b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
d) Jika anda tidak dapat memperoleh SIM maka anda tidak berusia 17 tahun.
e) Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia 17 tahun.

Penyelesaian :

$a)\ y \rightarrow x$

$b)\ x \rightarrow y$

$c)\ y \rightarrow x$

$d)\ \sim y \rightarrow \sim x$

$e)\ \sim x \rightarrow \sim y$

KASUS "implikasi"

Contoh (3) :

Tunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$

Penyelesaian :
Tabel di bawah ini memperlihatkan bahwa memang benar $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.
Dengan kata lain, pernyataan "Jika p maka q" ekivalen secara logika dengan "Tidak p atau q".

Tabel kebenaran $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

KASUS "implikasi"

Contoh (4) :

Tentukan ingkaran (negasi) dari $p \to q$.

Penyelesaian :
Dari contoh (3) sebelumnya, sudah ditunjukkan bahwa $p \to q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$. Gunakan hokum De Morgan untuk menentukan ingkaran dari $p \to q$:

$$\sim (p \to q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \qquad \blacksquare$$

Varian Proposisi Bersyarat

Terdapat bentuk implikasi lain yang berkaitan dengan $p \to q$. Ketiga variasi proposisi bersyarat tersebut adalah konvers (kebalikan), invers, dan kontraposisi dari proposisi asal $p \to q$.

i. Konvers : $q \to p$

ii. Invers : $\sim p \to \sim q$

iii. Kontraposisi : $\sim q \to \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	*implikasi* $p \to q$	*konvers* $q \to p$	*invers* $\sim p \to \sim q$	*kontraposisi* $\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Dari table kebenaran terlihat bahwa implikasi ekuivalen dengan kontraposisi

(contoh 12) implikasi, konvers, invers, kontraposisi

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut :

“jika amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya”

Penyelesaian :

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi : Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

(contoh 13) implikasi, konvers, invers, kontraposisi

Tentukan kontraposisi dari pernyataan :

a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara
b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negative
c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar
d) Hanya jika ia tidak terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan itu
e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang
f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin

Penyelesaian :

a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah
b) Jika 6 bilangan negative, maka 6 tidak lebih besar dari 0
c) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar". Sehingga kontraposisinya adalah "Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian"
d) Pernyataan yang diberikan ekuivalen dengan "Jika ia mendapat pekerjaan itu maka ia tidak terlambat"
e) Pernyataan yang diberikan ekuivalen dengan "Jika layang-layang bisa terbang maka ada angin". Kontraposisinya adalah "Jika tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang".

2.
INFERENSI (PENARIKAN KESIMPULAN)

MODUS PONEN

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap.
20 habis dibagi 2

∴ 20 adalah bilangan genap

MODUS TOLLEN

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Jika } n \text{ bilangan ganjil, maka } n^2 \text{ bernilai ganjil.} \\ n^2 \text{ bernilai genap} \\ \hline \therefore n \text{ bukan bilangan ganjil} \end{array}$$

SILOGISME HIPOTESIS

$$\begin{array}{rl} & p \longrightarrow q \\ & q \longrightarrow r \\ \hline \therefore & p \longrightarrow r \end{array}$$

Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian
Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah

∴ Jika saya belajar dengan giat, maka saya cepat menikah

SILOGISME DISJUNGTIF

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore \; q \end{array}$$

Saya belajar dengan giat atau saya mengulang tahun depan. Saya tidak belajar dengan giat. Karena itu, saya mengulang tahun depan

Saya belajar dengan giat atau saya mengulang tahun depan
Saya tidak belajar denagn giat

$\therefore$ Saya mengulang tahun depan

SIMPLIFIKASI

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

Hamid adalah mahasiswa ITS dan mahasiswa Ubaya. Karena itu, Hamid adalah mahasiswa ITS.

Dapat juga ditulis dengan cara:

Hamid adalah mahasiswa ITS dan mahasiswa Ubaya

∴ Hamid adalah mahasiswa ITS

Karena urutan proposisi di dalam konjungsi $p \wedge q$ tidak mempunyai pengaruh apa-apa.

PENJUMLAHAN

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit. Karena itu, Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit atau mengulang kuliah Algoritma.

Dapat juga ditulis dengan cara:

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit

∴ Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit atau mengulang kuliah Algoritma.

Karena urutan proposisi di dalam konjungsi $p \vee q$ tidak mempunyai pengaruh apa-apa.

KONJUNGSI

$$\begin{array}{ll} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \land q \end{array}$$

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit. Taslim mengulang kuliah Algoritma. Karena itu, Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit dan mengulang kuliah Algoritma.

Dapat juga ditulis dengan cara:

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit.
Taslim mengulang kuliah Algoritma.

$\therefore$ Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit dan mengulang kuliah Algoritma.

(contoh 14) pembuktian argumen

Periksa kesahihan argument berikut ini

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

∴ 5 adalah bilangan prima.

Penyelesaian :
Misalkan p adalah proposisi "5 lebih kecil dari 4" dan q adalah proporsi "5 adalah bilangan prima". Maka argument diatas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow \sim q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Tabel kebenaran untuk $p \longrightarrow \sim q, \sim p,$ dan q

p	q	$\sim q$	$p \longrightarrow \sim q$	$\sim p$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

(contoh 15) pembuktian argumen

Periksa kesahihan argument berikut ini

Jika 17 adalah bilangan prima, maka 3 tidak habis membagi 17.
3 habis membagi 17.

∴ 17 bukan bilangan prima.

Penyelesaian :
Misalkan p adalah proposisi “17 adalah bilangan prima” dan q adalah proporsi “3 habis membagi 17”. Maka argument diatas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow \sim q \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

Tabel kebenaran untuk $p \longrightarrow \sim q, \sim p,$ dan q

p	q	$\sim q$	$p \longrightarrow \sim q$	$\sim p$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

To be continue...